

Câu 1 (2,5 điểm) a) Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + y + z = m \\ m^2x + y + z = m \quad (m \text{ là tham số}). \\ x - my + z = -1 \end{cases}$$

b) Tìm trị riêng và vectơ riêng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Câu 2 (2 điểm) (**Mô hình dao động**) Giải phương trình vi phân

$$y'' + 7y' + 10y = 2 + e^{-t} + \sin 10t, \text{ với điều kiện } y(0) = 0 \text{ và } y'(0) = 0.$$

Chúng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t . Xác định biên độ, chu kỳ, tần số và điểm cân bằng của dao động này.

Câu 3 (2 điểm) (**Mô hình động học về chất phóng xạ; đơn vị thời gian t trong câu này là năm**)

Gọi $U(t)$, $T(t)$ lần lượt là lượng uranium 238 và thorium 234 trong cùng một mẫu chất phóng xạ ở thời điểm $t \geq 0$. Cho biết $U(t)$, $T(t)$ thỏa mãn hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = -mU & (1) \\ \frac{dT}{dt} = -nT + mU & (2) \end{cases},$$

với điều kiện ban đầu $U(0) = U_0$, $T(0) = T_0$; trong đó m, n là các hằng số dương.

a) Giải phương trình (1) tìm $U(t)$ theo m, U_0 .

b) Thay $U(t)$ có được ở (a) vào (2) rồi giải phương trình vi phân tìm $T(t)$ theo m, n, U_0, T_0 . Xác định giá trị của $T(t)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

Câu 4 (1,5 điểm) (**Mô hình vật rơi có lực cản không khí**)

Cho phương trình vi phân

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^\alpha, \quad v(0) = v_0.$$

Phương trình trên là phương trình vi phân của một vật có khối lượng m (đơn vị kg), rơi với vận tốc v (đơn vị mét/giây, thời gian t đơn vị là giây), vật chịu tác dụng lực hút Trái Đất và lực cản không khí tỷ lệ với v^α (hệ số tỷ lệ $k > 0, \alpha = const > 0$), vận tốc ban đầu v_0 .

Cho $m = 1(kg)$, $g = 10(m/s^2)$, $k = 0.4$, $\alpha = 1.3$, $v_0 = 0$. Lần lượt áp dụng phương pháp Euler (RK1) và phương pháp Euler cải tiến (RK2) với bước nhảy $h = 1$ đồng thời sử dụng máy tính (Casio), ước tính vận tốc của vật ở các giây tiếp theo từ 1 đến 6. Cụ thể, trình bày vào bài thi bằng cách kẻ lại bảng sau đây và điền đầy đủ những chỗ còn trống. Viết cách bấm casio hai cột đầu, tiếp theo bấm CALC (chạy thuật toán) rồi điền kết quả đầy đủ vào hai cột cuối, lấy 2 chữ số sau dấu chấm “.” thập phân:

Phương pháp Euler (RK1) Bấm để màn hình Casio hiển thị (chưa chạy thuật toán) Biến $t \xleftarrow{\text{Casio}} \rightarrow$ Biến X Biến $v \xleftarrow{\text{Casio}} \rightarrow$ Biến Y	Phương pháp Euler cải tiến (RK2) Bấm để màn hình Casio hiển thị (chưa chạy thuật toán) Biến $t \xleftarrow{\text{Casio}} \rightarrow$ Biến X Biến $v \xleftarrow{\text{Casio}} \rightarrow$ Biến Y	t_n (giây)	Giá trị gần đúng theo phương pháp Euler (RK1) (đơn vị m/s)	Giá trị gần đúng theo phương pháp Euler cải tiến (RK2) (đơn vị m/s)
		0	0	0
		1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		

Câu 5 (2 điểm) (câu này được phép sử dụng các công thức nghiệm thiết lập khi học hay trong giáo trình)

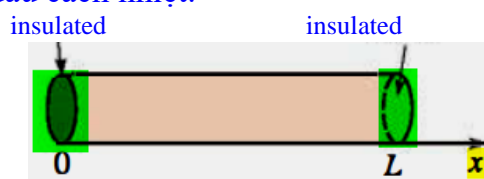
a) Bài toán truyền nhiệt một chiều **thuần nhất**, hai đầu cách nhiệt.

PT: $k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, 0 < x < L, t > 0$

BC: $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, t > 0$

IC: $u(x,0) = f(x), 0 < x < L$

Giải bài toán tìm $u(x,t)$ biết $f(x) = 120 + x$



(Hai đầu cách nhiệt, nhiệt độ ban đầu tại x là $f(x)$)

b) Bài toán **truyền sóng** một chiều **không thuần nhất**

PT: $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, 0 < x < L, t > 0$ (Dao động của dây do tác động của trọng lực)

BC: $u(0,t) = 0, u(L,t) = 0, t > 0$ (Hai đầu dây cố định trên trục hoành (trục ngang))

IC: $u(x,0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x), 0 < x < L$ (vị trí ban đầu $f(x)$, vận tốc ban đầu $g(x)$)

Giải bài toán tìm $u(x,t)$ biết $L = \pi, f(x) = x(\pi - x), g(x) = 0$.

❖ **Ghi chú** : Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)
Câu 1: Nắm vững phép toán ma trận, tính được định thức và ứng dụng, biết và thực hiện các cách giải hệ phương trình tuyến tính.	G1: 1.1, 1.2 ; G2:2.1,2.3 G2:2.1.3, 2.1.4 , 2.4.2,2.6;2.7
Câu 2, 3: Nhận dạng được các bài toán trong thực tế được mô hình bởi phương trình hoặc hệ phương trình vi phân. Giải được phương trình, hệ phương trình vi phân và hiểu được ý nghĩa các kết quả tìm được.	G1: 1.1, 1.2, G2:2.1,2.3 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4, 2.4.6
Câu 4, 5: Giải gần đúng phương trình vi phân bằng phương pháp số và ứng dụng vào thực tế. Giải bài toán truyền nhiệt một chiều, giải bài toán truyền sóng một chiều.	G1: 1.1; G2:2,2.1,2.3 G2:2.1, 2.1.2, 2.4.2

Ngày 30 tháng 5 năm 2024

Thông qua Bộ môn Toán